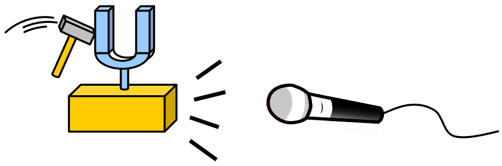
4 Son et musique, porteurs d'information

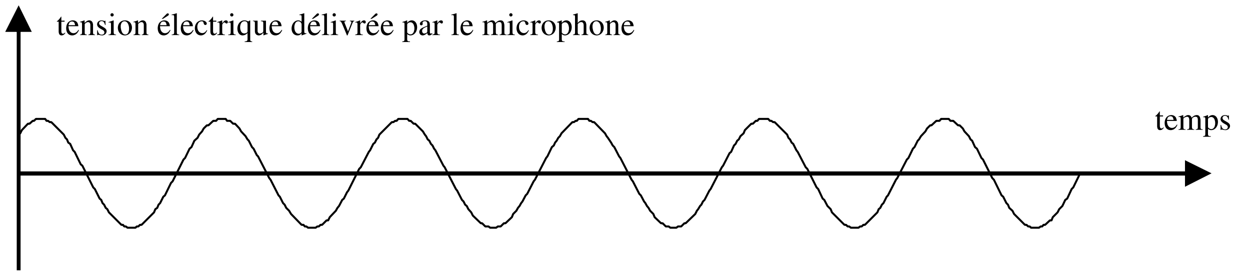
4.1 <u>Le son, phénomène vibratoire</u>

4.1.1 Le son pur

On enregistre le son émis lorsqu'on frappe un diapason.



L'enregistrement montre un signal dépendant du temps de façon sinusoïdale.

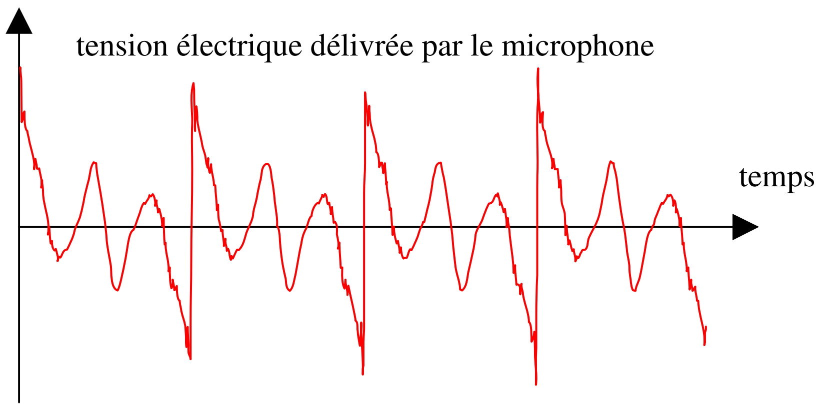


Un tel son est qualifié de pur.

4.1.2 Les sons composés

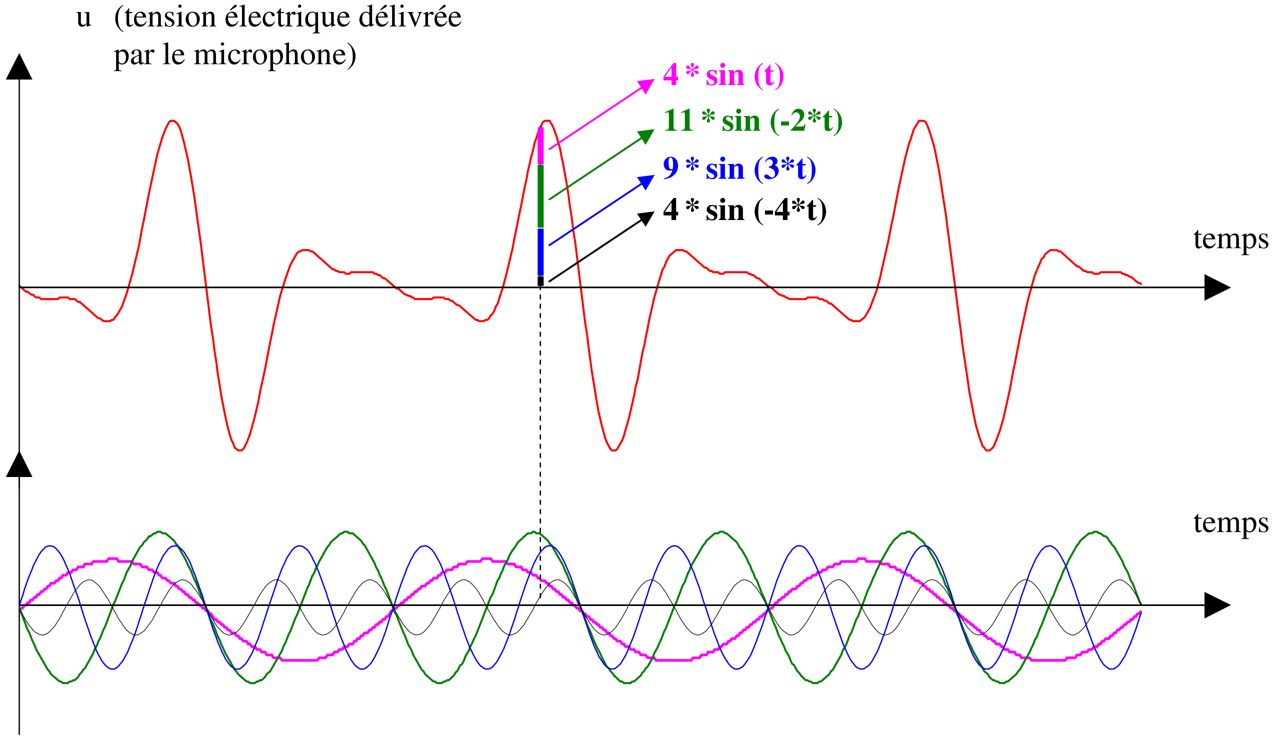
Un signal composé (ou complexe) peut-être périodique.

<u>Exemple</u> le son d'une trompette (ré3)



Le mathématicien Joseph Fourier a montré que tout signal périodique de fréquence « f » peut-être décomposée en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences f, 2f, 3f, … (fréquences multiples de « f »).

Exemple



« f » est appelée la fréquence de la fondamentale, les autres fréquences (2f, 3f, …) sont appelées les fréquences des harmoniques.

4.1.3 Puissance sonore et niveau d'intensité sonore

Pour que l'oreille humaine perçoive un son, dans le domaine des fréquences audibles, la puissance par unité de surface « I » de ce son doit être telle que :

$$10^{-12}\ \mathrm{W.m^{-2}} < I < (1 \text{ à } 100)\ \mathrm{W.m^{-2}}$$

où 10^{-12} W.m^{-2} (notée I_0) est considéré comme la limite de sensibilité de l'oreille.

La borne supérieure de la puissance sonore par unité de surface correspond à une destruction de l'oreille.

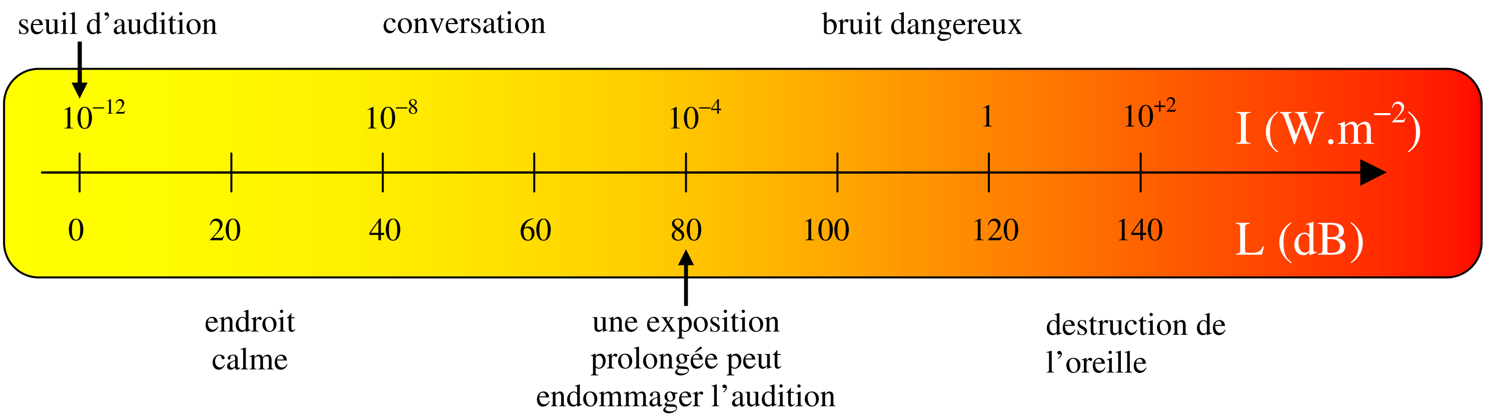
Le niveau d'intensité sonore « L » est lié à la puissance par unité de surface « I » par une échelle logarithmique :

$$L = 10 * \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad [\,L\,] = \text{dB (décibel)}$$

I : puissance sonore par unité de surface ; en $W.m^{-2}$
L : niveau d'intensité sonore ; en décibel (dB)

<u>Remarques</u> lorsque la puissance par unité de surface « I » est multipliée par 2, le niveau d'intensité sonore « L » augmente de 3 dB.

$I = I_0 * 10^{L/10}$



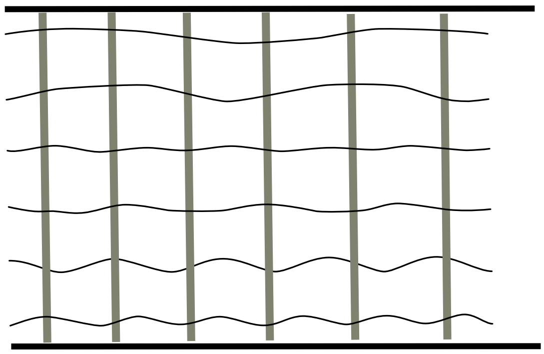
4.1.4 Vibration d'une corde tendue entre deux points fixes

Mise en oscillation, une corde tendue entre deux points fixes vibre librement en émettant un son composé dont la fréquence fondamentale ne dépend que de ses caractéristiques : longueur « L », force de tension « T », masse linéique « μ ».

$$f = \frac{1}{2 * L} * \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \text{(ne pas retenir)}$$

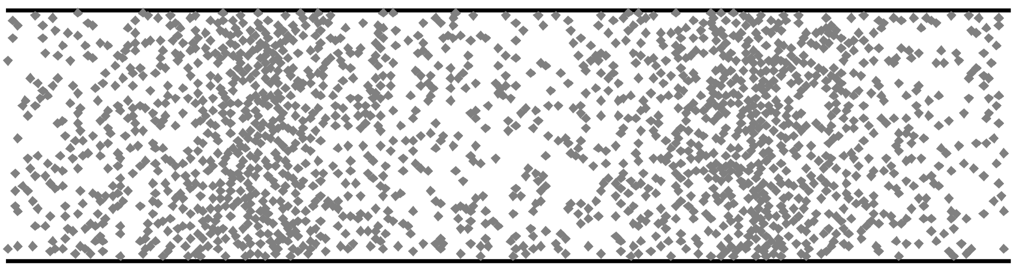
f	fréquence de vibration de la corde ; en hertz (Hz)
L	longueur de la corde ; en mètre (m)
T	force appelée tension de la corde ; en newton (N)
μ	masse de la corde par mètre (masse linéique) ; en $kg.m^{-1}$

Exemple	cordes de guitare en vibration



Un phénomène analogue se produit dans un tube contenant de l'air (ouvert à ses deux extrémités). Les molécules d'air vibrent dans le tube dans le sens de la longueur. La fréquence de ces vibrations est liée à la longueur du tube.

Exemple	vibration des molécules d'air dans un tube ouvert à ses deux extrémités



4.2 Musique et mathématiques

4.2.1 Les notes de musique

En musique, une **note** correspond à la fréquence d'un son (généralement, un son composé). La fréquence s'exprime en hertz de symbole Hz.

Exemple la note « la_3 » a une fréquence de 440 Hz

Remarque Pour désigner les notes, le moine Guido d'Arezzo, en 1028, s'est inspiré de L'Hymne à saint Jean-Baptiste, un chant religieux latin attribué au moine Paul Diacre :

Ut queant laxis	(pour que puissent)
Resonare fibris	(résonner les cordes)
Mira gestorum	(détendues de nos lèvres)
Famuli tuorum	(les merveilles de tes actions)
Solve polluti	(enlève le péché)
Labii reatum	(de ton impur serviteur)
Sancte **I**ohannes	(ô saint Jean)

L'ut a ensuite été remplacé par le do, plus facile à chanter

L'**intervalle** entre deux notes est défini par le rapport (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales.

Exemple $\frac{\text{fréquence}(\text{la})}{\text{fréquence}(\text{si})} = 1{,}125$ (intervalle de 1 ton)

L'**octave** est l'intervalle entre deux notes dont la fréquence de l'une est le double de l'autre. Ces notes portent le même nom, mais sont distinguées par un numéro d'octave.

Exemples fréquence (la_2) = 220 Hz
fréquence (la_3) = 440 Hz
fréquence (la_4) = 880 Hz

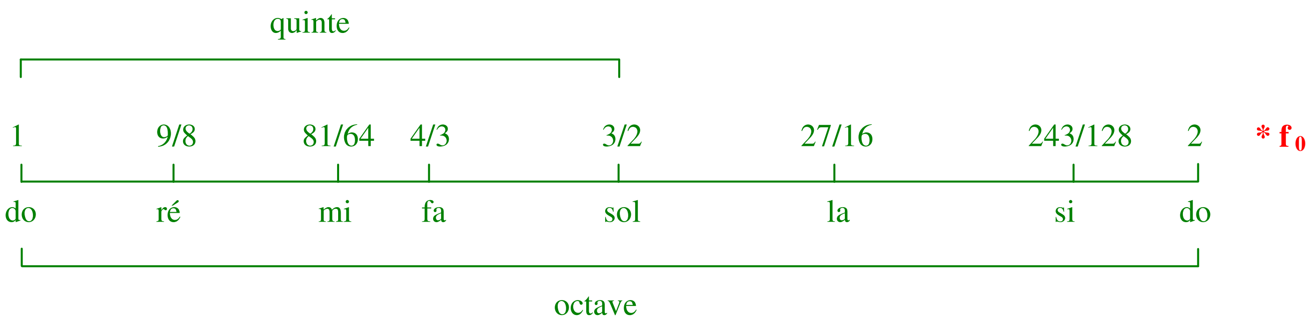
4.2.2 La gamme diatonique de Pythagore

Une **gamme** est une suite finie de notes réparties sur une octave. Dans l'antiquité, Pythagore a construit sa gamme en se basant sur un intervalle entre deux fréquences égal à 3/2 (cet intervalle est nommé

une **quinte**).
Des sons dont les fréquences sont dans ce rapport simple étaient alors considérés comme agréables à l'oreille (= consonants ≠ dissonants).

Exemple gamme diatonique de Pythagore

On part d'une note de fréquence f_0 ($1*f_0$). On obtient la note suivante en multipliant la fréquence par 3/2.
Si la fréquence est ≥ à $2*f_0$, on divise par 2.
Pythagore a ainsi construit la gamme diatonique :
(1), (3/2), (9/8) {= (3/2)*3/2 = 9/4, que l'on divise par 2, pour ramener la note dans la gamme de départ}, (27/16), ...



Raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes de la gamme diatonique de Pythagore est une suite infinie (elle ne « reboucle » jamais exactement sur la note de départ) :

La suite est définie par $(3/2)^n * (1/2)^p$
« p » étant l'entier (unique) tel que $(3/2)^n * (1/2)^p \in [1, 2[$

Exemple premiers termes de la suite du « cycle des quintes »

n = 0 et p = 0 $(3/2)^0 * (1/2)^0 = 1 * 1 = 1$
n = 1 et p = 0 $(3/2)^1 * (1/2)^0 = (3/2) * 1 = 3/2$
n = 2 et p = 1 $(3/2)^2 * (1/2)^1 = (9/4) * (1/2) = 9/8$
n = 3 et p = 1 $(3/2)^3 * (1/2)^1 = 27/16$
n = 4 et p = 2 $(3/2)^4 * (1/2)^2 = (81/16) * (1/4) = 81/64$
...

Peut-on trouver deux entiers « n » et « p », non nuls, tels que $(3/2)^n * (1/2)^p = 1$?
C'est à dire que l'on est revenu au point de départ et la suite est périodique (et pas infinie).

On peut écrire l'égalité $(3/2)^n * (1/2)^p = 1$ sous la forme $3^n = 2^{n+p}$.

Ce qui est impossible car 3^n est impair et 2^{n+p} est pair (cqfd).

Le cycle des quintes « reboucle » presque.

Exemple gamme diatonique de Pythagore

n = 7 et p = 4 $(3/2)^7 * (1/2)^4 = (2187/128) * (1/16) = 1{,}0679$

Pour que la dernière note soit égale à la première, il faut que l'une des quintes du cycle ne corresponde pas exactement à une multiplication par 3/2.

Exemple gamme diatonique de Pythagore

(1), (3/2), (9/8), (27/16), (81/64), (243/128), **(729/512)**, (2187/2048)

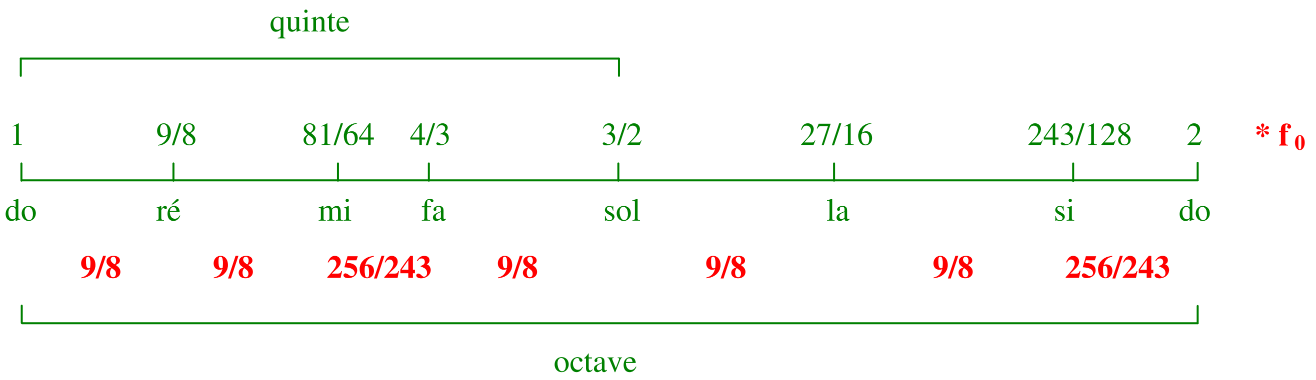
La 7ème itération permet de revenir exactement à (1) si on remplace (729/512) par (4/3)

(1), (3/2), (9/8), (27/16), (81/64), (243/128), **(4/3)**, (1)

Les intervalles entre deux notes consécutives de la gamme diatonique de Pythagore ne sont pas égaux.

Exemple

Les notes sont séparées d'un ton (fréquence * 9/8) ou d'un demi-ton (fréquence * 256/243)



4.2.3 La gamme tempérée

Transposer un morceau de musique, c'est l'adapter à un instrument de musique ou à la voix.

Pour cela, on multiplie la fréquence de chaque note par un même nombre (ce qui rendra le morceau de musique plus grave ou plus aigu).

<u>Exemple</u> un pianiste accompagnant une mezzo-soprano pourra baisser d’un ton la tonalité d’un air écrit pour une soprano.

La transposition des notes dans la gamme diatonique de Pythagore est difficile car les intervalles entre deux notes consécutives de la gamme diatonique de Pythagore ne sont pas égaux.

<u>Exemple</u>

On souhaite transposer par (9/8), la mélodie « do ré mi fa sol » ce qui donne « ré mi ? sol la »

n°	1		2		3		4		5
	do	* (9/8)	**ré**	* (9/8)	**mi**	* (256/243)	**fa**	* (9/8)	**sol**
	* (9/8)		* (9/8)		* (9/8)		* (9/8)		* (9/8)
	ré		**mi**		**?**		**sol**		**la**

La connaissance des nombres qui ne peuvent pas s’écrire sous la forme d’une fraction d’entiers a/b (**les nombres irrationnels**) a permis, au 17ème siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.

La gamme tempérée utilisée en occident et de nos jours est divisée en 12 intervalles (appelés demi-tons).
On passe d’une note à une autre, un demi-ton plus haut, en multipliant la fréquence par $\sqrt[12]{2}$. Pour un ton, on multiplie par $\sqrt[6]{2}$.

<u>Exemple</u>

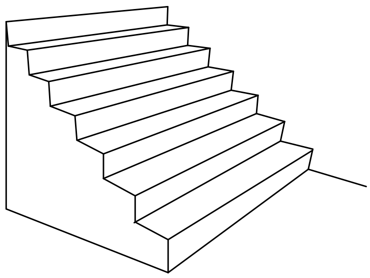
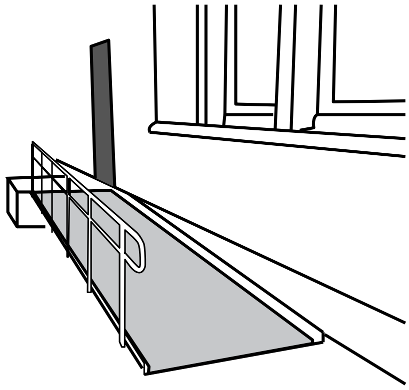
$* \sqrt[6]{2}$ $* \sqrt[12]{2}$

Note	do		ré		mi		fa		sol		la		si		do
Intervalle		1 ton		1 ton		½ ton		1 ton		1 ton		1 ton		½ ton	

4.3 <u>Le son, une information à coder</u>

4.3.1 Signal analogique, signal numérique

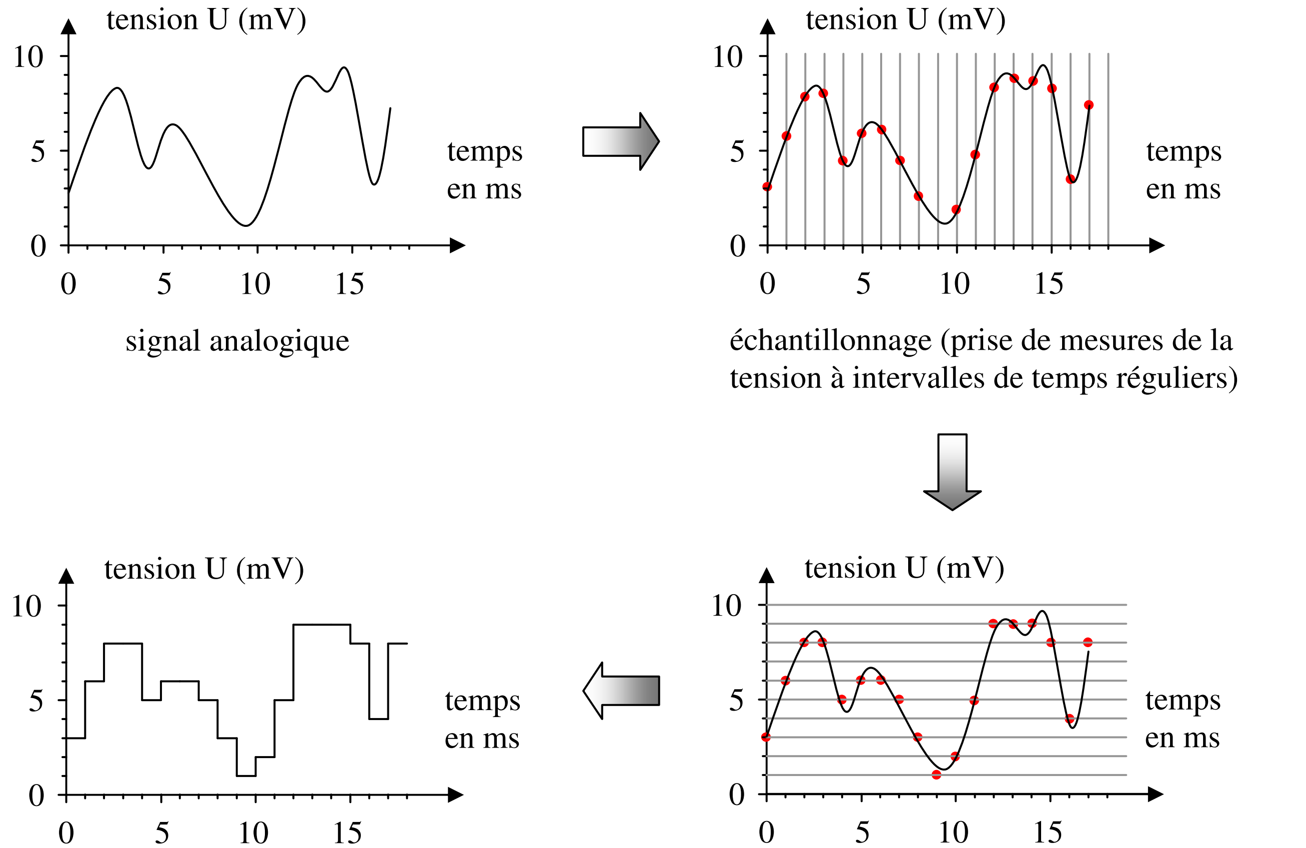
En montant un escalier, l’altitude du pied ne peut prendre que certaines valeurs. Au contraire, avec d’une rampe d’accès, toutes les altitudes sont possibles.

Le signal électrique en sortie d’un microphone est analogique (il varie de façon continue dans le temps). Un signal numérique varie de façon discrète (il ne peut prendre que certaines valeurs).

4.3.2 Etapes de la conversion analogique - numérique (CAN)

Exemple



signal analogique

échantillonnage (prise de mesures de la tension à intervalles de temps réguliers)

signal numérique

quantification (la valeur échantillonnée est remplacée par la tension la plus proche dans une liste finie de valeurs autorisées)

La **fréquence d'échantillonnage** « f » est le nombre d'échantillons par unité de temps (en hertz de symbole Hz).

En informatique, le nombre de valeurs autorisées lors de la quantification est égal à 2^n où « n » est le nombre de bit du convertisseur (n est nommé la **résolution**).

Plus la fréquence d'échantillonnage et plus la résolution sont élevées, plus la numérisation est fidèle, mais plus la taille « p » du fichier audio est grande :

$$p = f * n * \Delta t$$

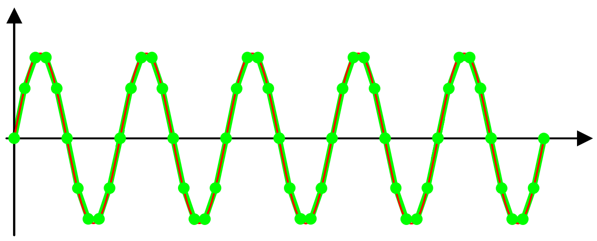
p poids (ou taille) du fichier audio ; en bit
f fréquence d'échantillonnage ; en Hertz (Hz)

n résolution ou nombre de bit de la quantification ; sans unité
Δt durée de l'enregistrement ; en seconde (s)

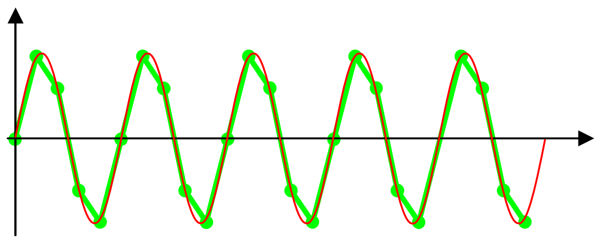
4.3.3 Le théorème de Shannon

L'échantillonnage d'un signal analogique nécessite une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

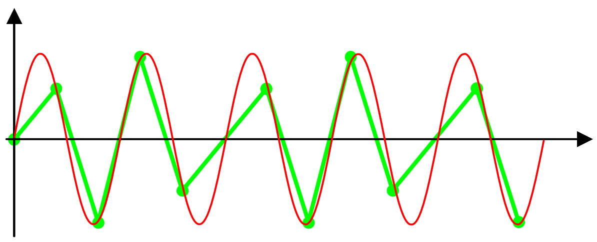
Exemples



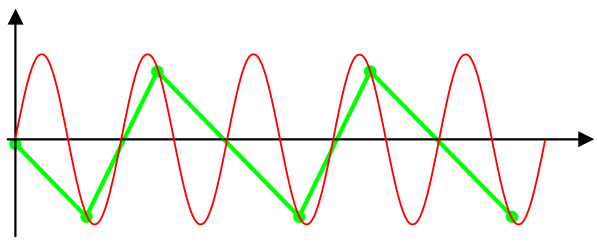
fréquence du signal f = 100 Hz
fréquence d'échantillonnage = 1 000 Hz



fréquence du signal f = 100 Hz
fréquence d'échantillonnage = 500 Hz



fréquence du signal f = 100 Hz
fréquence d'échantillonnage = 250 Hz



fréquence du signal f = 100 Hz
fréquence d'échantillonnage = 150 Hz

4.3.4 La compression d'un fichier audio

La compression consiste à diminuer la taille d'un fichier afin de faciliter son stockage et sa transmission.

Les techniques de compression spécifiques au son, dites « avec perte d'information », éliminent les informations sonores auxquelles l'oreille est peu sensible.

La perte d'information est irréversible, il est impossible de retrouver les données d'origine après une telle compression.

Chaque technique de compression est caractérisée par un **taux de**

compression τ défini par :

$$\tau = \frac{\text{taille du fichier après compression}}{\text{taille du fichier avant compression}}$$